Διάλεξη 3η

ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1. Αν $f:[0,\infty)\to\Re$ είναι n φορές παραγωγίσιμη με $f^{(k)}, k=0,1,...,n-1$ εκθετικής τάξης r και $f^{(n)}$ κατά τμήματα συνεχή, τότε η $f^{(n)}$ μετασχηματίζεται κατά Laplace και είναι

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(x)](s)=s^n\mathcal{F}(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-...-f^{(n-1)}(0), \quad s>r.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2. Αν $f:[0,\infty)\to\Re$ είναι συνεχής κατά τμήματα και εκθετικής τάξης r, τότε η συνάρτηση $\int_0^t f(s)ds$ μετασχηματίζεται κατά Laplace και είναι

$$\mathcal{L}\Big[\int_0^t f(u)du\Big](s)=\frac{1}{s}F(s), \quad s>max\{0,r\}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3. Ας είναι $f:[0,\infty)\to\Re$ μια εκθετικής τάξης r συνάρτηση. Αν η συνάρτηση $\frac{f(t)}{t}$ είναι συνεχής κατά τμήματα, τότε μετασχηματίζεται κατά Laplace και είναι

$$\mathcal{L}[f(t)/t](s)=\int_s^{\infty}\mathcal{L}[f](u)du, \quad s>r.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.4. Αν $f:[0,\infty)\to\Re$ είναι κατά τμήματα συνεχής και εκθετικής τάξης r, τότε η συνάρτηση $\mathcal{L}[f](s)$ έχει παραγώγους κάθε τάξης στο διάστημα (r,∞) και

$$\frac{d}{ds^n}\mathcal{L}[f](s)=(-1)^n\mathcal{L}[t^nf(t)](s), \quad s>r \quad n=1,2,....$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.5 Αν για την συνάρτηση $f:[0,\infty)\to\Re$ η παράγωγος f' είναι κατά τμήματα συνεχής και εκθετικής τάξης r, τότε

i) $lim_{t\to 0}f(t)=lim_{s\to\infty}sF(0)$.

ii) $lim_{t\to\infty}f(t)=lim_{s\to 0}sF(s)$.

Ορισμός. Συνέλιξη συναρτήσεων $(f*g)$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.6 Ας είναι $f,g:[0,\infty)\to\Re$ τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις . Είναι:

(i) $(f*g)(t)=(g*f)(t)$

(ii) $f*(kg+mh)(t)=k(f*g)(t)+m(f*h)(t) \quad (k,m\in\Re)$

(iii) $[f*(g*h)](t)=[(f*g)*h](t)$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.7 Αν $f, g : [0, \infty) \to \Re$ είναι συναρτήσεις συνεχείς κατά τμήματα και εκθετικών τάξεων r_1, r_2 αντίστοιχα, τότε η συνέλιξη των f, g ορίζεται για $s > max\{r_1, r_2\}$ και είναι

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s), \quad s > max\{r_1, r_2\}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.8 Αν $f : [0, \infty) \to \Re$ είναι μια πραγματική συνάρτηση της οποίας ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται στο (s_0, ∞) και $a > 0$ είναι μια πραγματική σταθερά, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$g(x) := \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a, \\ f(t-a), & a \leq t. \end{cases}$$

ορίζεται για $s > s_0$ και είναι

$$\mathcal{L}[g](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f](s), \quad s > s_0.$$

Παραδείγματα. Ασκήσεις.